La théorie de la musique relative

Écrire les relations entre les notes

Cyril Monkewitz | Édition révisée · 22 novembre 2026

Ouvrez l'article en ligne pour écouter les exemples. Cette édition de lecture contient leurs schémas, puis les démonstrations et les références.

Faites sonner un la à 440 Hz. À quelle fréquence se trouve son septième harmonique ? À 3 080 Hz. Descendez-le de deux octaves et vous obtenez 770 Hz. Sur un piano, la touche la plus proche est un sol. Si le la change de hauteur, quel sol doit le suivre, et de combien ?

La notation que je propose prend pour point de départ le geste qui a produit le son. Écrivez « sept quarts de la fréquence de ce la » et la septième a déjà une identité musicale, avant même qu'on ait choisi un diapason. La même idée permet d'écrire un intervalle tempéré, d'emprunter son entrée à une autre voix ou de reprendre toute une cadence pour la rattacher à une autre note. Pour entrer dans cette écriture, écoutons d'abord une corde.

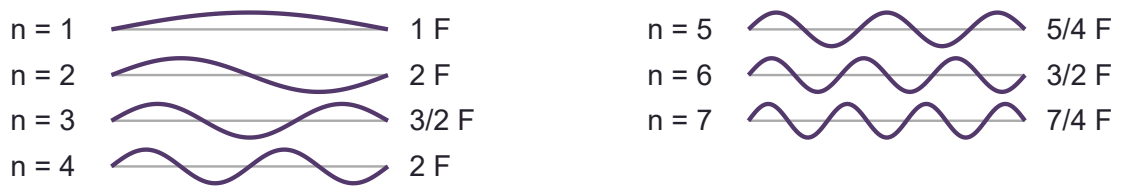
Imaginons que Beethoven puisse indiquer au violoniste comment accorder un sol. Veut-il que ce sol appartienne à l'accord de septième sur la qui le soutient, ou qu'il tire sa hauteur du fa♯ vers lequel se dirige la ligne ? Le passage est imaginaire. Un violoniste peut entendre et défendre l'une ou l'autre lecture. Un compositeur qui a fait son choix peut l'écrire et le transmettre à l'interprète. C'est en ce sens qu'il a pleine maîtrise des hauteurs voulues, note par note.

Section 1 Un bref historique du système à douze notes

Une corde, plusieurs notes

Fixons une corde à ses deux extrémités. Dans son mode de vibration le plus simple, elle se courbe tout entière d'un côté, puis de l'autre. Dans le mode suivant, son milieu reste immobile. Dans le troisième, deux points intérieurs restent immobiles. Pour une corde souple idéale de longueur L, le mode de rang n a pour longueur d'onde $2L/n$. À vitesse de propagation constante, sa fréquence est nF, où F est la fréquence fondamentale. Pincer une corde peut exciter plusieurs modes à la fois. Leur importance relative dépend entre autres de l'endroit où l'on pince la corde. Wolfe, String harmonics.

Descendez le troisième harmonique d'une octave. Sa fréquence vaut alors 3/2 de la fondamentale, ce qui donne une quinte pure. Descendez les cinquième et septième harmoniques de deux octaves, et vous obtenez les rapports 5/4 et 7/4. Avec la fondamentale, ces notes forment un accord de septième harmonique. Pour comprendre leur parenté, on peut retrouver ces mêmes hauteurs comme quatre harmoniques consécutifs d'une fondamentale plus grave. Leurs fréquences valent alors 4, 5, 6 et 7 fois celle-ci.



Ondes stationnaires d'une même corde idéale. À droite de chaque mode, sa fréquence ramenée dans l'octave entre F et 2F. Les octaves apparaissent à la borne supérieure.

Pourquoi douze quintes rejoignent presque sept octaves

Pour accorder un instrument à l'oreille, on peut monter d'une quinte puis, de la note obtenue, monter encore d'une quinte. Chaque fois, on multiplie la fréquence de départ par 3/2. Monter d'une octave la multiplie par 2. Après douze quintes, on arrive légèrement au-dessus de sept octaves. Le quotient des deux fréquences obtenues vaut exactement 531441/524288. Cet écart, d'environ 23,46 cents, est le comma pythagoricien. Un cent est un centième de demi-ton du tempérament égal à douze sons. Duffin sur les tempéraments et les commas.

Le calculateur permet de faire l'essai avec cinq, douze ou même 665 quintes. Certaines chaînes s'approchent encore plus près d'un nombre entier d'octaves. Pour les rejoindre exactement, il faudrait qu'une puissance de 3 d'exposant entier strictement positif soit égale à une puissance entière de 2, ce qui est impossible. Le clavier à douze classes de hauteurs apporte une réponse pratique à cet ancien problème d'accord. Les tempéraments inégaux répartissent les écarts de manière inégale. Dans le tempérament égal à douze sons, chaque demi-ton a le même rapport $2^{1/12}$. Sa quinte compte sept de ces pas et douze quintes ainsi tempérées couvrent exactement sept octaves. La quinte pure et la quinte tempérée répondent à deux intentions différentes. Démonstration 3.

En 1563, le mathématicien Giovanni Battista Benedetti soumet une énigme musicale au compositeur Cipriano de Rore. Les chanteurs enchaînent les intervalles purs de deux mesures, puis les reprennent. Ils retrouvent les mêmes notes écrites un comma syntonique, 81/80, plus haut à chaque reprise. Les lettres paraissent en 1585. Duffin reproduit la partition : on peut chanter soi-même le problème. Duffin, paragraphes 20–21 et exemple 1a.

Quel sol pour ce la ?

Voici trois lectures possibles des touches la, do♯, mi et sol. La première choisit ses hauteurs dans une octave divisée en douze pas égaux. La deuxième prend quatre harmoniques consécutifs. La troisième construit les hauteurs à partir d'octaves et de quintes pures. Comparez les trois fréquences du sol avant d'écouter la cadence de la section 2.

Un accord de septième sur la à 440 Hz. Fréquences en hertz, arrondies au millième.

Accordage	La	Do♯	Mi	Sol
12 pas égaux	440	554,365	659,255	783,991
Harmoniques 4 à 7	440	550	660	770
Quintes pures et octaves	440	556,875	660	782,222

Dans la troisième lecture, on monte de quatre quintes puis on redescend de deux octaves. On obtient ainsi la tierce de rapport 81/64. Deux quintes descendantes, chacune remontée d'une octave, donnent la septième de rapport 16/9. La tierce pythagoricienne, 81/64, dépasse la tierce harmonique, 5/4, d'un rapport de 81/80 : c'est le comma syntonique qui faisait monter les chanteurs de Benedetti. Un violoniste peut choisir l'une ou l'autre sur la même corde. Pour qu'un interprète ou un programme reproduise ce choix, il faut écrire quelque chose de plus que « sol » ou « do♯ ». Les fractions qui viennent de nous servir à expliquer la différence peuvent devenir la partition elle-même.

Section 2

La théorie de la musique relative

Écrire ce qu'une note emprunte à une autre

Supposons qu'une note doive sonner une quinte pure au-dessus d'une voix, entrer en même temps qu'une deuxième voix et durer moitié moins longtemps qu'elle. Ce sont trois décisions. Un changement de hauteur dans la première voix doit se répercuter sur la nouvelle note. Un déplacement de l'entrée dans la deuxième doit s'y répercuter aussi. En écrivant la fréquence, l'instant de départ et la durée obtenus, on consigne fidèlement une exécution. Au lecteur suivant de deviner quels changements devraient se transmettre.

Dans la théorie de la musique relative (Relative Music Theory, RMT), chaque propriété d'une note peut porter sa propre expression. Voici une note telle qu'elle peut apparaître dans le fichier enregistré par l'éditeur. Les nombres entre crochets désignent d'autres événements. Les trois lettres `f`, `t` et `d` en lisent respectivement la fréquence, l'instant de départ et la durée.

```
{
  "id": 9,
  "frequency": "(3/2) * [3].f",
  "startTime": "[8].t",
  "duration": "[8].d / 2"
}
```

Si l'événement 3 est à 440 Hz, l'événement 9 sonne à 660 Hz. Accordez le premier à 432 Hz et le second le suit à 648 Hz. Retardez l'événement 8 et le 9 entrera plus tard, à la même hauteur. L'événement qui fournit une fréquence peut très bien ne se faire entendre que plus tard dans le morceau. On peut ainsi accorder une voix à l'accord vers lequel elle se dirige. Pour calculer la valeur d'une note, l'évaluateur a besoin de la valeur qu'elle prend pour référence. L'auditeur peut les entendre dans l'ordre inverse.

Ce que la relation apporte à l'écriture

Les musiciens disposent déjà de plusieurs manières de dire « une quinte au-dessus ». Dans l'intonation juste libre de Lou Harrison, décrite par Larry Polansky, l'accord se construit au fil de la musique, d'un rapport choisi au suivant. Le logiciel Siren peut représenter une hauteur relative par un rapport et une hauteur de référence. Tous deux anticipent la manière de définir la hauteur utilisée ici. Des partitions hiérarchiques permettaient déjà de reprendre une structure musicale à une autre hauteur et à un autre moment. Rubato représente les événements musicaux par rapport à des points d'ancrage. Dans les partitions organisées en feuilles de calcul, les dépendances entre cellules sont explicites. Polansky · Pope · Buxton et ses collègues · Thalmann · Nash.

L'article publié sur cybercyril.com propose de faire du choix d'une source *pour chaque propriété d'un événement* un élément ordinaire de la partition, et de pouvoir rejouer tout un groupe d'événements à partir d'un nouveau point d'ancrage. Une note peut ainsi tenir sa hauteur d'une voix, son entrée d'une autre et sa durée d'une troisième. La version 2 de RMT Compose, l'éditeur conçu pour cette notation et utilisable dans un navigateur, donne à cette proposition un format de partition éditable et une arithmétique qui distingue une construction exacte d'une estimation. C'est dans ce langage et dans sa mise en œuvre que se situe la contribution. Un même intervalle peut s'écrire en cents, sous forme de rapport ou dans toute autre notation réversible. Lors d'un changement de référence, l'information à

conserver est celle de l'intervalle. Lorsqu'on déplace une note indépendamment des autres, c'est le choix de dépendance du compositeur qu'il faut également conserver. Démonstrations 1 et 2 · Article web daté.

Écrire l'accord une seule fois

Pour écrire un accord majeur, prenons une fondamentale, sa tierce à 5/4 et sa quinte à 3/2. Réunissons les trois événements en un groupe dont on peut choisir la hauteur de référence. Sur un la à 440 Hz, les trois fréquences sont 440, 550 et 660 Hz. Rattachons le groupe à un ré de fréquence 880/3 Hz. Les mêmes instructions donnent alors 880/3, 1100/3 et 440 Hz. On peut déplacer l'une des voix d'une octave pour modifier la disposition de l'accord. Le groupe enregistré pourrait aussi bien être une gamme, un sujet de fugue ou tout un passage.

Dans RMT Compose, ce groupe s'appelle un *module*. Déposer un module sur une note fait de cette note la source des hauteurs du module et place son entrée au début ou à la fin de la note, au choix. Les durées écrites en fonction de `base.d`, le temps de la partition, restent comptées en temps au lieu de s'étirer sur la note visée. Un motif bref peut ainsi se greffer sur une note longue et garder son allure habituelle. L'attaque, le relâchement et l'amplitude relèvent du rendu sonore de chaque événement. On peut définir l'intervalle harmonique indépendamment de ces paramètres. RMT Compose v2, code source et exemples de modules.

Écouter la résolution d'un accord de septième de dominante

Plaçons le temps de gauche à droite et la fréquence sur un axe vertical logarithmique. Toutes les octaves occupent la même hauteur sur le graphique et un intervalle donné garde la même étendue, quel que soit son point de départ. Dans l'exemple, le la entre d'abord, suivi de sa tierce, de sa quinte et de sa septième. Tous quatre laissent place à un accord de ré majeur. Le graphique ci-dessous, repris de l'article original, permet de suivre les notes qui se maintiennent et celles qui changent. Le symbole A7 désigne ici un *accord de septième de dominante sur la*, dont le sol est la septième.

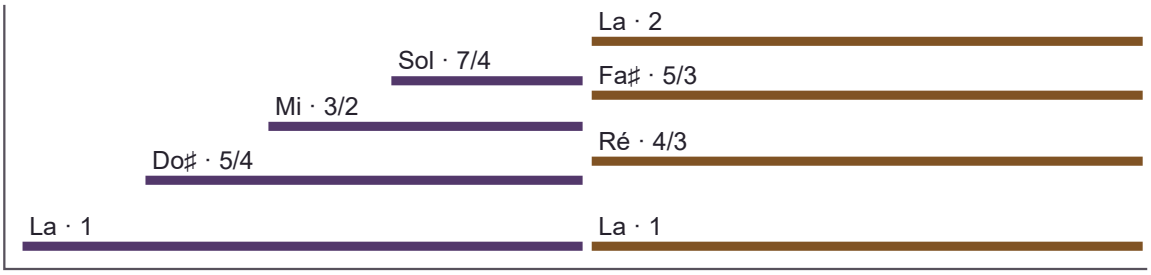
Écoutez d'abord les deux cadences simples à la même fréquence de départ. Dans la version harmonique, les notes qui entrent successivement présentent les proportions 4:5:6:7. La fréquence du ré d'arrivée vaut 4/3 de celle du la initial, et la tierce majeure de ce ré vaut 5/4 de sa fréquence. La version tempérée choisit ses intervalles parmi les douze divisions égales de l'octave. Essayez ensuite les versions qui enchaînent trois cadences. Chaque arrivée fournit le point de départ de la suivante. Changer la fréquence initiale déplace tout l'exemple. Les sons sinusoïdaux et les entrées décalées facilitent la comparaison des accordages à l'oreille. Le choix du timbre et de la disposition des voix reste ouvert.

Que doit faire le violoniste de cette septième ?

Prenons la ligne descendante la–sol–fa♯ au violon, en partant du la aigu à 880 Hz. Le la de référence vaut 440 Hz et le fa♯ d'arrivée se situe à 5/3 de sa fréquence, soit 2 200/3 Hz. Si le compositeur entend le sol comme septième de l'accord de la, il écrit `(7/4) * [1].f`, où l'événement 1 est le la de référence à 440 Hz. Le sol vaut exactement 770 Hz et descend au fa♯ dans un rapport de 21/20. S'il entend plutôt une note de passage devant aborder le fa♯ par le demi-ton précis de 16/15, il écrit `(16/15) * [3].f`, où l'événement 3 est le fa♯ à venir. Ce sol vaut 7 040/9 Hz, soit environ 782,22 Hz. Les trois noms de notes sur la partie de violon pourraient être les mêmes dans les deux cas.

Comparez les deux fins de phrase dans l'exemple du violon. Changez ensuite le fa♯ d'arrivée en gardant le la fixe. Le sol rattaché au la reste en place. Celui qui annonce le fa♯ se déplace avec lui. Ni le mot « septième » ni l'expression « note de passage » n'imposent l'un de ces rapports. C'est le

compositeur qui donne à sa lecture une conséquence précise sur la hauteur. Le violoniste garde la main sur l'archet, le temps et le vibrato de la descente. Il reçoit une indication qu'il aurait autrement dû reconstruire à l'oreille.



La7 se résout sur Ré. Chaque ligne donne une voix par rapport au La initial. Le temps va vers la droite. La distance verticale est logarithmique en fréquence.

Section 2.b

Champ d'application et exemples

1. Du diagramme à un instrument pour composer

L'article d'origine appelait de ses vœux un éditeur graphique dans lequel on pourrait déposer ces groupes sur une note. RMT Compose permet désormais d'en faire l'essai. Examinez un événement et ses expressions, rattachez un accord à une autre note, puis écoutez. Les fichiers de partition conservent les expressions sous forme de texte. L'éditeur les compile en instructions et suit les dépendances entre propriétés. Une définition circulaire ne peut pas fournir sa propre valeur de départ. Lors de la lecture, les fréquences et les temps obtenus sont convertis en nombres utilisables par le système audio. Ouvrir RMT Compose · Version étudiée dans cet article.

Une instruction exacte et une mesure approchée n'ont pas le même sens musical. Deux entiers suffisent à écrire la septième harmonique de rapport 7/4. L'éditeur conserve les rationnels sous forme de fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers BigInt. Un douzième d'octave demande une autre expression, `2^(1/12)`. Conserver la puissance permet, après douze pas, de retrouver exactement le rapport 2. Il en va de même si l'on divise 7/4 en sept pas égaux, 3 en treize pas égaux ou la période composée 1 + √2 en sept pas égaux. Un nombre explicitement marqué comme approché, tel que `~1.4983`, transmet ce statut aux résultats des calculs qui l'utilisent. L'évaluateur recourt aussi à une approximation pour certaines opérations symboliques qu'il ne prend pas en charge ou quand ses limites de calcul sont atteintes. L'exactitude porte ici sur la construction mémorisée. La restitution sonore a une précision finie. Démonstration 4 · Test des douze pas · Test de la période composée.

2. Transcrire une décision musicale

En transcrivant une interprétation, on peut mesurer deux fréquences et en calculer le rapport. Cela ne suffit pas à savoir quelle voix l'interprète a prise pour référence. On peut consigner la mesure et indiquer qu'il s'agit d'une approximation, ou écrire une relation que l'interprète, l'instrument ou la partition permettent d'établir. Ces lectures répondent à des questions différentes. Pour comprendre l'accordage et le phrasé propres à une tradition, il faut faire place au savoir des musiciens qui la pratiquent. L'éditeur permet de consigner ce que l'on apprend d'eux.

Le site d'origine illustre le réemploi avec un module consacré au canon ascendant de *L'Offrande musicale* de Bach. Suivez une reprise du sujet. De quel événement antérieur ou ultérieur doit-elle tenir sa hauteur ? Une autre voix peut en déterminer l'entrée. Une cadence peut tendre vers une basse

encore à venir. Le choix revient à l'arrangeur et il s'entend. D'autres partitions ont donné aux indications d'intervalle une place centrale. Des instruments adaptatifs peuvent choisir leur accordage selon le contexte d'exécution. Ici, le choix peut s'inscrire explicitement dans la partition. Consulter le module du canon · Sources du canon · Zhu et Sapp · Trueman et ses collègues.

Les deux partitions MIDI de cette édition sont une harmonisation à quatre voix de *Douce nuit* de Gruber et le Prélude en ut majeur BWV 846 de Bach. Pour chacune, un fichier en tempérament égal sert de référence à deux versions en RMT. Chaque version accorde les notes par rapport à la tonique et aux fondamentales des accords. Dans ces exports, chaque note occupe la touche MIDI la plus proche, sur un canal qui lui est réservé tant qu'elle sonne. Avec une plage de *pitch bend* de ±2 demi-tons, l'arrondi s'écarte de moins de 0,0123 cent de la hauteur visée. La page de comparaison joue le fichier tempéré et la version choisie en sons sinusoïdaux purs, avec les mêmes notes, les mêmes durées, les mêmes instants d'entrée et les mêmes vélocités MIDI. Code de l'export MIDI.

3. Explorer l'espace entre les touches

Prenons un accord augmenté, par exemple do–mi–sol♯. Si chaque tierce est pure, de rapport 5/4, les trois fréquences d'un accord dont la fondamentale vaut r sont r, $5r/4$ et $25r/16$. Montons d'une tierce supplémentaire. Nous atteignons $125r/64$, environ 41,06 cents au-dessous de l'octave. Si l'accord partage au contraire l'octave en trois parts égales, son pas vaut $2^{1/3}$ et le troisième pas donne exactement $2r$. Ces deux constructions peuvent correspondre aux trois mêmes touches du piano. La partition peut désormais garder leur différence visible.

Dans les exemples sonores, c'est la période elle-même qui change. Un accord dont les extrêmes ont un rapport de trois place ses notes aux rapports 1, 5/3, 7/3 et 3 par rapport à sa fondamentale. Un autre exemple fait entendre en un seul accord les six hauteurs qui bornent cinq pas égaux dans une période de rapport cinq. Le rapport de chaque pas vaut $5^{1/5}$ et les deux notes extrêmes forment un rapport exact de 5:1. Dans les deux gammes, essayez de repérer à l'oreille le retour au point de départ dans la période suivante. Dans l'enchaînement V–I répété, la succession des fondamentales se poursuit tandis que la basse est ramenée dans son registre. La transposition d'octave garde l'exemple audible tout en préservant la filiation des quintes. Démonstrations 3 et 4.

Guide d'écoute

1. **Une chaîne de cadences ouverte.** Chaque cadence prend pour fondamentale la résolution précédente et la ramène dans l'octave de départ.
2. **Un accord couvrant une période de 3:1.** Les rapports 1, 5/3, 7/3 et 3 se résolvent sur 1, 4/3, 5/3 et 2.
3. **D'un accord descendant à une nouvelle disposition.** Suivez 1, 7/9, 5/9, 3/9, puis un accord construit sur 3/5, 4/5, 1 et 6/5.
4. **Une seconde progression ouverte.** Une sonorité mineure passe par des accords majeurs et de septième avant le cycle suivant.
5. **La gamme « Tesla » à neuf notes.** Sur une période de 3:1, écoutez 1, 11/9, 13/9, 5/3, 17/9, 19/9, 7/3, 23/9 et 25/9, puis un accord. L'auteur a choisi le nom de la gamme.
6. **Dix hauteurs dans une période de 5:1.** Les numérateurs impairs de 5 à 23, avec 5 au dénominateur, donnent la gamme. L'accord final atteint la période.
7. **Cinq divisions égales de 5:1.** Les six hauteurs de rapports $5^{k/5}$, avec k = 0, …, 5, sonnent ensemble.
8. **Improvisateur de Kids' Games.** L'arrangement de Cyril Monkewitz s'appuie sur Kids' Games, Fanfare de Gérard Massini. Les voix empruntent leurs motifs à une petite bibliothèque. Une procédure aléatoire choisit les répétitions, les transitions et les modulations.

4. Constituer une bibliothèque de relations

Une entrée de bibliothèque gagnerait à contenir davantage qu'un nom d'accord. Un accord augmenté construit par deux tierces de rapport 5/4 y côtoierait celui qui partage l'octave en trois. Chaque entrée pourrait conserver ses équations, la disposition des voix et un exemple sonore. Un compositeur pourrait y consigner les situations où cet accord lui a servi. Deux personnes peuvent décrire la même résolution en des termes très différents. La bibliothèque peut accueillir ces témoignages à côté d'une construction par intervalles que chacun peut examiner et rejouer.

5. Laisser une phrase en appeler une autre

L'improvisateur réalisé à partir de *Kids' Games, Fanfare* de Gérard Massini puise dans un petit répertoire de phrases et choisit laquelle enchaîner. La question de la référence se pose alors à l'échelle d'une phrase entière. Dès lors qu'une phrase porte l'indication de la façon dont elle se rattache au point d'arrivée précédent, un programme peut choisir celle qui suit tout en laissant entendre leur lien musical. L'instrument autonome accessible ici permet également de régler le tempo. Écouter l'improvisateur.

Jusqu'où une telle écriture peut-elle aller ? Une fois ses harmoniques ramenés dans une même octave, la série harmonique idéale y fournit déjà une infinité de hauteurs distinctes. À partir d'une référence donnée, une fraction désigne exactement tout multiple rationnel positif de cette référence. Les fractions permettent aussi de s'approcher autant qu'on le souhaite de toute fréquence positive. Les puissances symboliques écrivent exactement d'autres intervalles encore, dont le demi-ton du tempérament égal. Les nombres réels demeurent plus nombreux que les expressions finies. Pour le compositeur, la liberté est concrète. Il peut choisir une relation sans chercher de touche supplémentaire, la conserver avec toute la précision que permet sa partition et en faire dépendre une autre note. Démonstrations 3 et 5.

À propos de cette édition

Je dédie ce travail à mon fils Zénon Yota.

Cyril Monkewitz a écrit l'article original et conçu la notation et les exemples musicaux. Une archive publique de l'article existe depuis novembre 2023.

L'improvisateur utilise *Kids' Games, Fanfare*, une œuvre commandée à Gérard Massini. Le compositeur conserve le droit de réutiliser son œuvre.

Démonstrations mathématiques

Que doit conserver une partition si l'on veut pouvoir déplacer une note et entraîner avec elle les intervalles écrits à partir de cette note ? Nous représentons chaque son de hauteur déterminée par une fréquence positive en hertz. Transposer revient à multiplier toutes les fréquences par un même nombre positif. Ces hypothèses portent sur l'accord des sons. Le rythme, le timbre et la perception des hauteurs soulèvent d'autres questions.

1. Que conserve-t-on en changeant de référence ?

Proposition. Les rapports de fréquences à une note de référence déterminent une suite de hauteurs à une transposition commune près.

Démonstration. Prenons comme référence la première note, de fréquence f_0. Pour chaque note, écrivons $r_i = f_i / f_0$. Une transposition de facteur s multiplie par s le numérateur et le dénominateur de chaque rapport. Tous les rapports sont donc conservés. Réciproquement, supposons qu'une deuxième suite présente les mêmes rapports et que sa première note ait pour fréquence g_0. Chacune de ses fréquences vaut alors $g_0 \times r_i$. Une seule transposition, de facteur g_0 / f_0, transforme la première suite en la seconde.

Ainsi, toute description qui reste inchangée par transposition et qui distingue toutes les suites à une transposition près doit distinguer exactement les mêmes configurations de rapports. On est libre de choisir une écriture qui préserve cette correspondance. Par exemple, un intervalle exprimé exactement en cents par la valeur c donne le rapport $2^{c/1200}$. C'est l'information portée par la partition qui est nécessaire. Les systèmes d'intervalles généralisés de Lewin offrent un traitement antérieur et plus large des intervalles et des transpositions. Lewin, *Generalized Musical Intervals and Transformations*, chapitre 2.

2. Quelle note doit suivre celle que l'on déplace ?

Proposition. Même si l'on connaît les fréquences exactes de toutes les notes d'un accord, l'effet voulu d'une modification peut rester indéterminé.

Démonstration par l'exemple. Faisons entendre une basse à 440 Hz, une voix intermédiaire à 550 Hz et une voix aiguë à 660 Hz. Si l'on écrit l'aigu à la quinte de la basse, sa fréquence vaut 440 × 3/2. Si l'on écrit l'aigu à la tierce mineure de la voix intermédiaire, elle vaut 550 × 6/5. Les deux calculs donnent 660 Hz dans l'accord initial et continuent à coïncider après toute transposition commune. Abaissons maintenant la voix intermédiaire à 540 Hz en maintenant la basse. La première écriture donne toujours 660 Hz. La seconde donne 648 Hz. Les fréquences de départ étant identiques, elles ne permettent pas de départager les deux intentions.

Une partition qui offre ces deux possibilités doit conserver de quoi les distinguer. En RMT, on fait ce choix en inscrivant la note de référence et l'intervalle dans l'expression qui définit la voix aiguë.

3. Combien de quintes justes tiennent dans une octave ?

Proposition. Aucun ensemble fini de classes de hauteurs ne contient une chaîne indéfinie de quintes de rapport 3/2, même en assimilant deux notes à l'octave.

Démonstration. Si une classe de hauteurs revenait, un nombre entier positif k de quintes couvrirait un nombre entier m d'octaves. On aurait $(3/2)^k = 2^m$, d'où $3^k = 2^{m+k}$. Le membre de gauche est divisible par 3. Celui de droite est une puissance de 2. Aucune classe ne se répète donc. Douze quintes, par exemple, dépassent sept octaves d'un rapport de 531441/524288, soit environ 23,46 cents.

La série harmonique idéale en offre un exemple plus direct encore. Pour une fondamentale F, deux harmoniques distincts de rang impair appartiennent toujours à deux classes différentes. Monter d'une ou de plusieurs octaves multiplie le rang par une puissance de 2 et le rend pair. La série comportant une infinité de rangs impairs, elle fournit une infinité de classes de hauteurs distinctes.

---

4. Quand retrouve-t-on exactement la période divisée ?

Proposition. Pour tout rapport de période positif P et tout entier positif n, il existe un seul rapport positif qui, répété n fois, donne P.

Démonstration. Répéter n fois un pas de rapport x donne x^n. Tout nombre positif possède une unique racine n-ième positive. Le pas cherché est donc $P^{1/n}$. Plus généralement, les exposants de puissances de même base s'additionnent quand on multiplie ces puissances. Deux pas P^a et P^b couvrent ainsi P^{a+b}. Toute suite finie de pas dont les exposants rationnels ont pour somme un couvre exactement une période, même si les pas sont inégaux ou si certains sont descendants.

Douze pas de $2^{1/12}$ atteignent l'octave. Sept pas de $(7/4)^{1/7}$ mènent de 440 Hz à 770 Hz exactement. Chaque pas est une subdivision de la septième naturelle, dont le rapport vaut 7/4. La démonstration vaut aussi pour une période dont le rapport est une somme, par exemple $1 + \sqrt{2}$. Remplacer un pas irrationnel par une valeur décimale arrondie modifie le produit et fait perdre cette égalité exacte.

---

5. Avec quelle précision peut-on écrire une fréquence ?

Proposition. À partir d'une référence positive exacte F, les rapports d'entiers donnent exactement tous les multiples rationnels positifs de F. Ils permettent aussi d'approcher toute fréquence positive avec une erreur aussi petite qu'on le souhaite.

Démonstration. Tout multiple rationnel positif s'écrit $F \times p/q$ avec p et q entiers positifs. Considérons maintenant une fréquence positive quelconque x et une tolérance positive ε en hertz. Choisissons un dénominateur q assez grand pour que l'espacement F/q entre deux fréquences consécutives de la grille soit inférieur à la fois à x et à 2ε. Arrondissons qx/F à l'entier le plus proche, que nous appelons p. Cet entier est positif. La fréquence $F \times p/q$ se trouve à une distance de la cible au plus égale à la moitié de l'espacement, donc inférieure à ε.

Les puissances symboliques donnent une écriture exacte à d'autres valeurs encore, dont $\sqrt{2}$. Toute langue de notation qui écrit ses partitions en un nombre fini de signes tirés d'un alphabet fini rencontre cependant une limite. On peut énumérer toutes les suites de signes par longueur croissante, puis par ordre alphabétique pour chaque longueur. À référence fixée, les valeurs exactes qu'elles désignent forment donc un ensemble au plus dénombrable. Or les réels positifs ne sont pas dénombrables. Dans ce modèle, on peut approcher toute fréquence aussi près qu'on le souhaite. La possibilité de l'écrire exactement dépend de la fréquence et des opérations dont dispose la notation.

Sources et antécédents

1. University of New South Wales, Music Acoustics. *Strings, standing waves and harmonics*. Les schémas montrent pourquoi les modes de vibration d'une corde idéale ont pour fréquences des multiples entiers de la fondamentale. Les auteurs expliquent aussi pourquoi les partiels d'une corde réelle peuvent s'en écarter. Consulter les schémas et le texte.

2. Ross W. Duffin (2006). « Just Intonation in Renaissance Theory and Practice ». *Music Theory Online* 12(3). Aux paragraphes 20 et 21 et dans l'exemple 1a, Duffin reconstitue la première énigme d'accord de Benedetti. En enchaînant des intervalles purs, des chanteurs retrouvent une note déjà lue sur la portée à une fréquence différente. L'exemple 1b transcrit le passage dans des tempéraments mésotoniques, l'une des façons d'éviter cette dérive. Lire l'analyse et les exemples musicaux.

3. Larry Polansky (1987). « Paratactical Tuning: An Agenda for the Use of Computers in Experimental Intonation ». *Computer Music Journal* 11(1), 61–68. Aux pages 64–65, Polansky présente l'intonation libre de Lou Harrison : des rapports choisis l'un après l'autre construisent l'accord au fil de la musique. C'est un précédent direct pour le choix d'une référence locale. Notice de la revue · Lire le passage.

4. William Buxton, William Reeves, Ronald Baecker et Leslie Mezei (1978). « The Use of Hierarchy and Instance in a Data Structure for Computer Music ». *Computer Music Journal* 2(4), 10–20. On peut enregistrer un passage une seule fois et le reprendre en modifiant sa hauteur, sa vitesse ou sa dynamique. Les sections 1.2.3 et 4.1.2.2 expliquent la représentation de ces reprises. Lire l'article des auteurs.

5. David Lewin (2007 ; première édition 1987). *Generalized Musical Intervals and Transformations*. Oxford University Press. Le chapitre 2 définit les systèmes d'intervalles généralisés. Il situe l'argument de transposition de la première démonstration dans un cadre plus large. Édition et sommaire de l'éditeur.

6. Stephen Travis Pope (2007). *The Siren 7.5 Reference Manual*. Les classes RatioPitch et RatioMagnitude constituent un précédent particulièrement proche. Une hauteur peut contenir un rapport que le programme applique à une hauteur de référence. Consulter le manuel · Examiner le code d'une version ultérieure.

7. Florian Thalmann (2007). *Musical Composition with Grid Diagrams of Transformations*. Mémoire de master, Université de Berne. Les pages 18–19 décrivent le MacroScore de Rubato Composer, une partition hiérarchique dans laquelle des notes satellites sont repérées par rapport à une note d'ancrage. Lire la description des notes satellites.

8. Chris Nash (2014). « Manhattan: End-User Programming for Music ». *Proceedings of the International Conference on New Interfaces for Musical Expression*, 221–226. Manhattan introduit des formules de tableur dans un séquenceur. Une cellule peut lire la valeur d'une autre et suivre ses modifications. Consulter l'article et ses partitions.

9. Dan Trueman, Aatish Bhatia, Michael Mulshine et Theo Trevisan (2019). « Tuning Playfully: Composed and Adaptive Tunings in bitKlavier ». *Computer Music Journal* 43(2–3), 67–88. Les auteurs montrent comment le choix d'une référence d'accord peut dépendre du jeu de l'interprète. En RMT, le compositeur peut fixer la référence de chaque événement dans la partition. Notice de la revue · Lire l'article.

10. Julie Zhu et Craig Stuart Sapp (2021). « Ratioscore: A Text-Based System for Just Intonation ». *Actes de TENOR '20/21*, 205–211. Les sections 2.1–2.2 décrivent la hauteur de référence d'une voix et l'écriture de ses rapports à l'aide d'exposants. Le quatuor des auteurs illustre l'emploi de rapports exacts dans une partition exécutable. Lire l'article.

11. Andrea Agostini et Daniele Ghisi (2025). « Just Intonation in bach ». *Actes de TENOR '25*, 241–252. Cette proposition ultérieure combine l'écriture d'une hauteur tempérée et une composante d'intonation juste. Les rapports rationnels s'expriment au moyen des exposants de leurs facteurs premiers. Cet exemple illustre la distinction entre le calcul de l'intervalle et son écriture sur la portée. Lire l'article.

12. Markus Lepper et Baltasar Trancón y Widemann (2026). « F-operator: A Proposal for a Generative Notation for Frequency Factors in Music ». *Actes de TENOR '26*. Les auteurs proposent une écriture commune des facteurs de fréquence employés dans différents systèmes d'accord. Les exposants rationnels y expriment aussi les divisions égales. Lire l'article.

13. Cyril Monkewitz (2023). *Relative Music Theory*. La section 2 présente une note dont la fréquence, le début, la durée et l'amplitude ont leurs propres références, puis explique comment rattacher un accord ou un thème à une note source. La capture de l'Internet Archive établit que ce texte était public au plus tard le 1er novembre 2023. Consulter l'original archivé.

14. Cyril Monkewitz (2024). *Bach's Neverending Canon*. Arrangement en RMT du *Canon a 2, per tonos* de l'*Offrande musicale* de J. S. Bach, BWV 1079 (1747). L'accord du ton employé dans la démonstration est un choix de Monkewitz. Lire le commentaire de l'arrangeur · Voir le lecteur archivé le 13 novembre 2024 · Examiner l'arrangement et le code du lecteur · Écouter l'interprétation de la Nederlandse Bachvereniging.

15. Cyril Monkewitz (2025–2026). *RMT Compose*. La capture de février 2025 documente un accès public à la première génération de l'éditeur. La version du code étudiée ici conserve les puissances fractionnaires exactes lors de la division d'une période définie par une somme. Voir l'éditeur archivé le 14 février 2025 · Examiner le code de la v2.